BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

*№4* *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2009*

# ОЦЕНКА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ ДЛЯ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА АВТОРЕГРЕССИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

**Р.А.СУЛЕЙМАНОВА**

***Бакинский Государственный Университет***

***nadir suleymanov D mail ru***

*В данной работе построены оценки максимального правдоподобия для случайного параметра авторегрессии первого порядка. Полученные оценки имеют смещение при каждом конечном $n$. При вычислении смещения оценки используются старшие моменты гауссовских величин.*

**Введение.** Впервые дискретная модель авторегрессии первого порядка со смещенным параметром рассматривалась в работе [1]

$$X_n = \theta_n X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

где $X_0 = 0$ , $\varepsilon_n \sim N(0,1)$ и $(\theta_n)$ -последовательность случайных величин с $E\theta_n = 0$ и $D\theta_n^2 = \sigma^2$ . Были построены последовательные оценки параметра. Исследованию свойств полученных оценок неизвестного параметра посвящено большое число работ. Приведем краткий обзор применения этой модели в различных областях науки. В работе [2] модели типа использовались при анализе радиоактивного распада, в работе [3] - в задачах управления, в работе [4] - при изучении вопросов, связанных с наследственностью растений, в работе [5] - при анализе экономических данных и т.д.

В настоящей работе приведенная выше модель усложнена за счет введения последовательности $\theta_n = \theta + \eta_n$ вместо $\theta = const$ . При $\sigma = 0$ наблюдения $(X_n)_{n\geq 1}$ образуют традиционную авторегрессионную последовательность первого порядка [3].

Значения случайного параметра модели авторегрессии первого порядка являются независимыми случайными величинами с неизвестным математическим ожиданием. Для этого параметра строится оценка максимального правдоподобия. Оценка $\hat{\theta}_n$, построенная по выборке $X_0, X_1, \ldots, X_n$, имеет смещение при каждом конечном $n > 2$ . При вычислении смещения оценки используются старшие моменты гауссовских случайных величин. При доказательстве смещенности оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$ существенно используется факт независимости случайных параметров, входящих в исходную модель.

Пусть на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathrm{F}, P\}$ задан частично наблюдаемый процесс $(\theta_t, \xi_t)$, $t \geq 0$, у которого может наблюдаться лишь компонента $(\xi_t)$, $t \geq 0$. В каждый момент времени $t$ требуется, основываясь на наблюдениях $\{\xi_s,\ 0 \leq s \leq t\}$, давать оценку ненаблюдаемых значений $\theta_t$. Задача оценивания $\theta_t$ для некоторых частных случаев $\xi_t$ рассматривается в этой работе.

**1. Оценка максимального правдоподобия.** На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathrm{F}, P)$ задана гауссовская случайная последовательность $X = (X_n)_{n\geq 0}$, удовлетворяющая авторегрессионной модели первого порядка со случайным параметром

$$X_n = \theta_n X_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{1.1}$$

причем $(\theta_n)_{n\geq 1}$, $\varepsilon_n \sim N(0,1)$ - две независимые последовательности независимых случайных величин и $X_0 = 0$ с вероятностью 1. Положим

$$\theta_n = \theta + \eta_n,$$

где $\eta_n$ -независимые нормальные $N(0, \sigma^2)$ случайные величины, следовательно, $(\theta_n)$, входящие в модель (1.1) в качестве случайных параметров, – также независимые случайные величины.

Тогда модель (1.1) примет вид:

$$X_n = \theta X_{n-1} + \eta_n X_{n-1} + \varepsilon_n.$$

По предположению $\eta_n$ и $\varepsilon_n$ - независимые гауссовские случайные величины. Условное распределение $P(\eta_n X_{n-1} + \varepsilon_n \mid X_{n-1})$ будет $N(0, 1 + X_{n-1}^2 \sigma^2)$ распределением [6].

Обозначим

$$\tilde{\varepsilon}_n = \eta_n X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

тогда $X_n$ представим в следующем виде:

$$X_n = \theta X_{n-1} + \sqrt{1 + X_{n-1}^2 \sigma^2}\, \tilde{\varepsilon}_n, \tag{1.2}$$

где $\tilde{\varepsilon}_n$ - последовательность независимых гауссовских случайных величин с параметрами $N(0,1)$.

Чтобы обосновать независимость гауссовских случайных величин $\tilde{\varepsilon}_n$ и $\tilde{\varepsilon}_{n+s}$, $s > 0$ вычислим:

$$E(\varepsilon_n + \eta_n X_{n-1})(\varepsilon_{n+s} + \eta_{n+s} X_{n-1+s}) =$$
$$= E\varepsilon_n \varepsilon_{n+s} + E\varepsilon_n \eta_{n+s} X_{n-1+s} + E\eta_n X_{n-1} \varepsilon_{n+s} + E\eta_n X_{n-1} \eta_{n+s} X_{n-1+s} =$$
$$= E\varepsilon_n E\varepsilon_{n+s} + E\varepsilon_n E\eta_{n+s} EX_{n-1+s} +$$
$$+ E\eta_n EX_{n-1} E\varepsilon_{n+s} + E\eta_n EX_{n-1} E\eta_{n+s} EX_{n-1+s}.$$

По условию $\varepsilon_n$ и $\eta_n$- независимые последовательности независимых случайных величин, причем $E\varepsilon_n = 0$ и $E\eta_n = 0$ и, кроме того, $X_{n-1}$ не зависит от $\eta_n$. Поэтому $E\widetilde{\varepsilon}_n\widetilde{\varepsilon}_{n+s} = 0$.

**Теорема 1.1.** *Пусть наблюдается выборка* $X_0, X_1, \ldots, X_n$ *из случайной последовательности* $X = (X_n)_{n\geq 0}$ , *определенной на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathrm{F}, P)$, *заданная в виде (1.2), причем с вероятностью 1* $X_0 = 0$. *Тогда оценка максимального правдоподобия для параметра* $\theta$ *определяется следующим образом*

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i-1}}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}^2}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}. \tag{1.3}$$

**Доказательство**. Естественной оценкой для $\theta$ по наблюдениям $X_1, \ldots, X_n$, $n \geq 2$ является оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$.

Запишем совместную плотность распределения вероятностей, используя независимость $\widetilde{\varepsilon}_n$, и получим функцию правдоподобия

$$L_\theta(X_0, X_1, \ldots, X_n) = (2\pi)^{-n/2} \times$$

$$\times\left[\prod_{k=1}^{n}(1+X_{n-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right]^{-1}\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \theta X_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right]. \tag{1.4}$$

Логарифмируя функцию правдоподобия, получим:

$$\ln L_\theta(X_0, X_1, \ldots, X_n) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+X_{n-1}^2\sigma^2) - -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \theta X_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2.$$

Дифференцируя по $\theta$ логарифм функции правдоподобия, получим оценку

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i-1}}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}^2}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}. \tag{1.5}$$

Подставляя в (1.5) значение $X_i$, заданное в (1.2), получим

$$\hat{\theta}_n = \theta + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}\,\widetilde{\varepsilon}_i}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}^2}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}. \tag{1.6}$$

Теорема доказана.

**2. Смешанность оценки максимального правдоподобия.** Для доказательства теоремы 2.1 непосредственно вычисляется математическое ожидание в трех указанных в теореме различных случаях. При вычислении смещения оценки используются старшие моменты гауссовских случайных величин. При доказательстве смешанности оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_n$ существенно используется факт независимости случайных параметров, входящих в исходную модель (1.2).

**Теорема 2.1.** *Для выборки $X_0, X_1, \ldots, X_n$ из случайной последовательности (1.2) при $n \to \infty$ главное слагаемое асимптотического разложения информации Фишера имеет вид*:

$$E\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}^2 \cong \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \theta^2 + \sigma^2 = 1, \\ \frac{n}{1-(\theta^2+\sigma^2)}, & \theta^2 + \sigma^2 < 1, \\ \frac{(\theta^2+\sigma^2)^{2n}}{((\theta^2+\sigma^2)-1)^2}, & \theta^2 + \sigma^2 > 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

*Оценка $\hat{\theta}_n$, определенная (1.3), по выборке $X_0, X_1, \ldots, X_n$ из случайной последовательности (1.2) имеет смещение при каждом конечном $n > 2$, но является асимптотически несмещенной.*

**Доказательство.** Легко проверить, что для случайной последовательности (1.2) $EX_n = 0$, если $EX_0 = 0$ с вероятностью 1.

Выразим из (1.2)

$$X_1 = \tilde{\varepsilon}_1,$$

$$X_2 = \theta X_1 + \sqrt{1 + X_1^2\sigma^2}\,\tilde{\varepsilon}_2,$$

$$X_2^2 = \theta^2 X_1^2 + 2\theta X_1\sqrt{1 + X_1^2\sigma^2}\,\tilde{\varepsilon}_2 + (\sqrt{1 + X_1^2\sigma^2}\,\tilde{\varepsilon}_2)^2 =$$

$$= \theta^2 X_1^2 + 2\theta X_1\tilde{\varepsilon}_2\sqrt{1 + X_1^2\sigma^2} + (1 + X_1^2\sigma^2)\tilde{\varepsilon}_2^2.$$

Найдем дисперсию случайной величины $X_2$:

$$EX_2^2 = \theta^2 E\tilde{\varepsilon}_1^2 + 2\theta EX_1\tilde{\varepsilon}_2^2\sqrt{1 + X_1^2\sigma^2} + E\tilde{\varepsilon}_2^2 + E\tilde{\varepsilon}_1^2\tilde{\varepsilon}_2^2\sigma^2 = 1 + \theta^2 + \sigma^2,$$

так как $EX_1 = E\tilde{\varepsilon}_1 = 0$ и $\tilde{\varepsilon}_1$ и $\tilde{\varepsilon}_2$ - независимы.

Для случайной величины $X_3$

$$X_3 = \theta X_2 + \sqrt{1 + X_2^2\sigma^2}\,\tilde{\varepsilon}_3$$

также найдем дисперсию:

$$EX_3^2 = \theta^2 EX_2^2 + 2\theta EX_2\tilde{\varepsilon}_3\sqrt{1 + X_2^2\sigma^2} + (1 + EX_2^2\sigma^2) =$$

$$= \theta^2(1 + \theta^2 + \sigma^2) + 1 + \sigma^2(1 + \theta^2 + \sigma^2) =$$

$$= 1 + (\theta^2 + \sigma^2)(1 + \theta^2 + \sigma^2) = 1 + (\theta^2 + \sigma^2) + (\theta^2 + \sigma^2)^2.$$

Аналогично для случайной величины

$$X_4 = \theta X_3 + \sqrt{1 + X_3^2\sigma^2}\,\tilde{\varepsilon}_4$$

получаем выражение для ее дисперсии:

$$EX_4^2 = 1 + (\theta^2 + \sigma^2) + (\theta^2 + \sigma^2)^2 + (\theta^2 + \sigma^2)^3.$$

Итак, с помощью математической индукции получено реккурентное соотношение:

$$EX_n^2 = 1 + EX_{n-1}^2(\theta^2 + \sigma^2).$$

Таким образом, $EX_1^2, EX_2^2, \ldots, EX_n^2$ образуют геометрическую прогрессию, причем

$$EX_n^2 = \frac{(\theta^2 + \sigma^2)^n - 1}{(\theta^2 + \sigma^2) - 1}.$$

Их последней формулы следует, что $EX_n^2$ также является геометрической прогрессией. Найдем ее сумму $\sum_{i=1}^{n} EX_{i-1}^2$:

$$\sum_{i=1}^{n} EX_{i-1}^2 = \left(\frac{1}{(\theta^2 + \sigma^2) - 1}\right) \sum_{i=1}^{n} \left[(\theta^2 + \sigma^2)^{i-1} - 1\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{(\theta^2 + \sigma^2) - 1}\right)\left(\frac{(\theta^2 + \sigma^2)^n - 1}{(\theta^2 + \sigma^2) - 1} - n\right) =$$

$$= \frac{(\theta^2 + \sigma^2)^n - 1}{((\theta^2 + \sigma^2) - 1)^2} - \frac{n}{(\theta^2 + \sigma^2) - 1}. \qquad (2.2)$$

Для доказательства утверждения (2.1) теоремы рассмотрим выражение (2.2) при больших значениях $n$.

При $\theta^2 + \sigma^2 = 1$, обозначим $x = \theta^2 + \sigma^2$ и найдем предел, применяя дважды правило Лопиталя,

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^n - 1}{(x-1)^2} - \frac{n}{x-1}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n - 1 - n(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{nx^{n-1} - n}{2(x-1)} \cong \frac{n^2}{2}. \qquad (2.3)$$

При $\theta^2 + \sigma^2 < 1$ имеем

$$\frac{n}{1 - (\theta^2 + \sigma^2)} - \frac{1 - (\theta^2 + \sigma^2)^n}{(1 - (\theta^2 + \sigma^2))^2}.$$

При $n \to \infty$, $\left(\theta^2 + \sigma^2\right)^n \to 0$, поэтому этим слагаемым можно пренебречь, тогда получим

$$\frac{n}{1 - (\theta^2 + \sigma^2)} - \frac{1 - (\theta^2 + \sigma^2)^n}{(1 - (\theta^2 + \sigma^2))^2} = \frac{n - n(\theta^2 + \sigma^2) - 1}{(1 - (\theta^2 + \sigma^2))^2} \cong \frac{n(1 - (\theta^2 + \sigma^2))}{(1 - (\theta^2 + \sigma^2))^2}. \qquad (2.4)$$

При $\theta^2 + \sigma^2 > 1$ преобразуем исходное выражение следующим образом:

$$\frac{(\theta^2 + \sigma^2)^n - 1}{((\theta^2 + \sigma^2) - 1)^2} - \frac{n}{(\theta^2 + \sigma^2) - 1} \cong$$

$$\cong \frac{(\theta^2 + \sigma^2)^n \left(1 - \frac{1}{(\theta^2 + \sigma^2)^n}\right)}{((\theta^2 + \sigma^2) - 1)^2} - \frac{n}{(\theta^2 + \sigma^2) - 1} \cong$$

$$\cong \frac{(\theta^2+\sigma^2)^n}{((\theta^2+\sigma^2)-1)^2} - \frac{n}{(\theta^2+\sigma^2)-1}.$$

Покажем, что второе слагаемое правой части последнего выражения гораздо меньше первого, т.е.

$$\frac{n}{(\theta^2+\sigma^2)-1} = o\left(\frac{(\theta^2+\sigma^2)^n}{((\theta^2+\sigma^2)-1)^2}\right).$$

Для этого рассмотрим их отношение и вычислим предел по правилу Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{(\theta^2+\sigma^2)-1}}{\dfrac{(\theta^2+\sigma^2)^n}{((\theta^2+\sigma^2)-1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n((\theta^2+\sigma^2)-1)^2}{((\theta^2+\sigma^2)-1)(\theta^2+\sigma^2)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n((\theta^2+\sigma^2)-1)}{(\theta^2+\sigma^2)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n((\theta^2+\sigma^2)-1)^2}{n(\theta^2+\sigma^2)^{n-1}} = 0,$$

тогда

$$\frac{(\theta^2+\sigma^2)^n-1}{((\theta^2+\sigma^2)-1)^2} - \frac{n}{(\theta^2+\sigma^2)-1} \cong \frac{(\theta^2+\sigma^2)^n-1}{((\theta^2+\sigma^2)-1)^2}. \tag{2.5}$$

Из (2.3), (2.4) и (2.5) следует утверждение (2.1) теоремы.

Теперь докажем смешанность оценок (1.3). Подставляя из (1.5) в (2), получим:

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i-1}}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}^2}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}} = \theta + \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}\,\tilde{\varepsilon}_i}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_{i-1}^2}{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}.$$

Найдем математическое ожидание $E\hat{\theta}_n$. По предположению, $\theta_n$ - последовательность независимых гауссовских случайных величин, входящих в качестве неизвестных параметров в исходную модель (1), тогда

$$E\hat{\theta}_n = (2\pi)^{-n/2}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+X_{k-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right)^{-1} \int_{R^n} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta x_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right] \times$$

$$\times \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i x_{i-1}}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}} dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+X_{k-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right)^{-1} \int_{R^n} exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i-\theta x_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right] \times$$

$$\times exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\theta x_{n-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)\right]\frac{\Sigma_{i=1}^{n-1}\frac{x_i x_{i-1}}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}+\frac{x_n x_{n-1}}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}dx_1\ldots dx_n=$$

$$=(2\pi)^{-n/2}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+X_{k-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right)^{-1}\int\limits_{R^{n-1}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i-\theta x_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right]\times$$

$$\times\frac{\Sigma_{i=1}^{n-1}\frac{x_i x_{i-1}}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\theta x_{n-1}}{\sqrt{1+X_{n-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right]dx_n\right)dx_1\cdots dx_{n-1}+$$

$$+(2\pi)^{-n/2}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+X_{k-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right)^{-1}\int\limits_{R^{n-1}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i-\theta x_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right]\times$$

$$\times\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{x_n x_{n-1}}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\Sigma_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\theta x_{n-1}}{\sqrt{1+X_{n-1}^2}}\right)^2\right]dx_n\right)dx_1\cdots dx_{n-1}=I_1+I_2. \qquad (2.6)$$

Вычислим внутренний интеграл, входящий в $I_2$, он равен

$$\frac{\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\Sigma_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_n\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\theta x_{n-1}}{\sqrt{1+X_{n-1}^2}}\right)^2\right]dx_n=$$

$$=\sqrt{2\pi}\sqrt{1+X_{n-1}\sigma^2}\,\frac{\theta x_{n-1}}{\Sigma_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}.$$

Тогда $I_2$ определяется следующим образом

$$I_2=\theta(2\pi)^{-(n-1)/2}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(1+X_{k-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right)^{-1}\int\limits_{R^{n-1}}\frac{\frac{x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\Sigma_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i-\theta x_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right]dx_1\cdots dx_{n-1}. \qquad (2.7)$$

Вычислим внутренний интеграл, входящий в $I_1$, он равен

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\theta x_{n-1}}{\sqrt{1+X_{n-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right]dx_n=\sqrt{2\pi}\sqrt{1+X_{n-1}^2\sigma^2}.$$

Тогда $I_1$ выражается следующим образом

$$I_1=(2\pi)^{-(n-1)/2}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(1+X_{k-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right)^{-1}\int\limits_{R^{n-1}}\frac{\frac{\Sigma_{i=1}^{n-1}x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\Sigma_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}+\frac{x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}\times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i-\theta x_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right]dx_1\cdots dx_{n-1} =$$

$$= (2\pi)^{-(n-1)/2}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(1+X_{k-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right)^{-1}\int\limits_{R^{n-1}}\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n-1}x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}\times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i-\theta x_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right]dx_1\cdots dx_{n-1} = E\,\hat{\theta}_{n-1},$$

так как

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}+\frac{x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}\left(1+\frac{\frac{x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}\right)\cong\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2},$$

что получено за счет малости слагаемого

$$\frac{\frac{x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{i-1}^2\sigma^2}}=o(1).$$

Таким образом, в результате приведенных преобразований получаем

$$E\,\hat{\theta}_n = I_1 + I_2 = E\,\hat{\theta}_{n-1} + I_2, \tag{2.8}$$

где $I_2$ определяется формулой (2.7).

Рассмотрим отдельно случай $n=2$ в (2.8), получим

$$E\,\hat{\theta}_2 = I_1 + I_2 = E\,\hat{\theta}_1 + I_2. \tag{2.9}$$

Рассмотрим каждое слагаемое (2.9) отдельно. Из (1.3) при $n=1$ следует, что

$$\hat{\theta}_1 = 0,\quad E\,\hat{\theta}_1 = 0,$$

так как по условию $X_0 = 0$ с вероятностью 1. Тогда $E\,\hat{\theta}_2 = I_2$. Из (2.7) найдем $I_2$ при $n=2$, которое в этом случае выражается следующим образом

$$I_2 = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+X_1^2\sigma^3}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{x_1^2}{1+x_1^2\sigma^2}}{\frac{x_1^2}{1+x_1^2\sigma^2}}\exp\left[-\frac{x_1^2}{2(1+X_1^2\sigma^2)}\right]dx_1 = \theta. \tag{2.10}$$

Таким образом, оценка (1.3) при $n=2$ является несмещаннной. Проверим этот важный факт непосредственно подставляя в исходную формулу (2.6), в которой вычисляется математическое ожидание оценки (1.3), $n=2$. Имеем

$$E\,\hat{\theta}_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{1+X_1^2\sigma^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\theta x_1}{\sqrt{1+X_1^2\sigma^2}}\right)^2-\frac{x_1^2}{2}\right]\frac{\frac{x_2x_1}{1+x_1^2\sigma^2}}{\frac{x_1^2}{1+x_1^2\sigma^2}}dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1+X_1^2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_2}{x_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\theta x_1}{\sqrt{1+X_1^2\sigma^2}}\right)^2\right] \exp\left[-\frac{x_1^2}{2}\right] dx_1 dx_2 . \quad (2.11)$$

Вычислим внутренний интеграл, входящий в (2.11), интегрируя по $x_2$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1+X_1^2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\theta x_1}{\sqrt{1+X_1^2\sigma^2}}\right)^2\right] dx_2 = \theta x_1 . \quad (2.12)$$

Подставляя из (2.12) в (2.11) и интеприруя по $x_1$, получим

$$E\,\hat{\theta}_2 = \frac{\theta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_1}{x_1} \exp\left[-\frac{x_1^2}{2}\right] dx_1 = \theta,$$

т.е. точно также, как и в (2.10) получили при $n = 2$ несмещенную оценку. Как в обоих случаях ясно видно, это происходит из-за того, что оценка (1.3) при $n = 2$ состоит только из одного слагаемого.

Таким образом, из (2.8) при каждом конечном $n > 2$ имеем

$$E\,\hat{\theta}_n = E\,\hat{\theta}_{n-1} + \theta \cdot I,$$

где

$$I = (2\pi)^{-(n-1)/2}\left(\prod_{k=1}^{n-1}(1+X_{k-1}^2\sigma^2)^{1/2}\right)^{-1} \int_{R^{n-1}} \frac{\frac{x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{x_i-\theta x_{i-1}}{\sqrt{1+X_{i-1}^2\sigma^2}}\right)^2\right] dx_1 \cdots dx_{n-1} > 0 \quad (2.13)$$

за счет положительности интеграла. Это означает, что при каждом конечном $n > 2$ оценка (1.3) смещенная.

Однако, из (2.13) следует, что предел выражения, входящего в интеграл,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i-1}^2}{1+x_{n-1}^2\sigma^2}} = 0 ,$$

так что оценка (1.3) - асимптотически несмещенная.

Теорема 2.1 доказана.

Таким образом, получили, что оценка (1.3) является смещенной при каждом фиксированном $n$.

В заключение отметим, что авторегрессионные модели со случайными коэффициентами, которые используются при описании "случайных блужданий в случайных средах", самым тесным образом связаны с нелинейными ARCH(p)-моделями. Модель ARCH(1) в общем случае имеет вид

$$X_n = \beta_0 + \beta_1 X_{n-1} + \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2}\,\varepsilon_n.$$

В этом случае говорят, что $X_n$ является авторегрессионной моделью первого порядка с ARCH(1)-с шумом $\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2}\,\varepsilon_n$, $n > 0$. Условно-гауссовский характер этой модели дает возможность представить плотность совместного распределения случайных величин $X_k$ , $k = 1,\dots,n$, получить функцию правдоподобия и построить оценки параметров [6].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Pergamentshikov S.M. and Shiryaev A.N. On Reparametrization and Asimptotically Optional Minimax Estimation in a Generalized Autoregressic Model // Ann. Academiae Scientarium Fennicae, Series A.I. Mathematica, 1992, v. 17, p. 111-116.
2. Конев В.В. Границы для среднего числа наблюдений в задачах последовательного оценивания параметров случайных процессов рекуррентного типа // Автоматика и телемеханика, 1983, № 8, с. 64-73.
3. Greenwood P.E. and Shiryaev A.N. Segmential estimation for first order autoregressive models // Stochastics, 1990, 200 p.
4. Paulson A.S., Uppulari C.R.R. Limit laws of a sequence determined by a random difference equation governing a one compartment system // Math. Biosci, 1972, №13, p. 325-333.
5. Kalman R.E. Control of randomly varying linear dynamical systems // Proc. Symp. Appl. Math. Soc., 1962, №13, p. 278-298.
6. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Модели. Факты. М.: Фазис. 1998, 180 с.
7. Сулейманова Р.А. Оценивание параметров в линейных диффузионных моделях // Вестник Московского Университета, 1988, №6, с.43-46.
8. Süleymanova R.A. Estimation of diffusion process parameters by discrete observations // AMEA Xəbərəri, fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası, 2007, 27 c., № 7, s. 143-150.


## TƏSADÜFÜ ƏMSALLI 1-Cİ TƏRTİB AVTOREQRESSİYA MODELİNDƏ NAMƏLUM PARAMETRİN MAKSİMAL HƏQİQƏTƏUYĞUN QİYMƏTLƏNMƏSİ


**R.A.SÜLEYMANOVA**


### XÜLASƏ


Məqalədə 1-ci tərtib avtoreqressiya modelindəki naməlum təsadüfi parametrin maksimal həqiqətəuyğun qiymətlənmələri qurulur. Alınan qiymətlənmələrdə hər $n$ üçün sürüşmə halları hesablanılır və bu işdə Hauss kəmiyyətlərinin yüksək momentlərindən istifadə olunur.


## ESTIMATION OF THE MAXIMAL LIKELIHOOD FOR THE UNKNOWN PARAMETER OF THE AUTO REGRESSION OF FIRST ORDER WITH RANDOM PARAMETER


**R.A.SULEYMANOVA**


### SUMMARY


In this work the estimation of the maximal likelihood for the random parameter of the first order autoregression is constructed. The received estimation has a blending for every finite $n$ . For the calculation of the blending of the estimation the high moments of Qause quantites are used.